

CONVECTION NATURELLE TURBULENTE SUR UNE PLAQUE VERTICALE ISOTHERME, TRANSITION, ECHANGE DE CHALEUR ET FROTTEMENT PARIETAL, LOIS DE REPARTITION DE VITESSE ET DE TEMPERATURE†

JEAN COUTANCEAU

Maître-Assistant au Laboratoire d'Etudes Thermiques de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique
et d'Aérotechnique, 86, Poitiers, France.

(Reçu le 31 octobre 1968)

Résumé—Il est montré qu'un groupe intéressant de paramètres de similitude dans l'étude du phénomène de convection naturelle est constitué par les nombres de Prandtl et de Nusselt et les rapports $gD\delta^3/\nu_0^2$ et T_p/T_0 . Une série d'expériences confirme ce choix.

Il est proposé de nouvelles relations donnant les valeurs du coefficient local d'échange de chaleur et de la tension pariétale de frottement pour un écoulement turbulent ainsi que des lois de répartition de vitesse et de température dans la couche limite turbulente.

NOTATIONS

a ,	diffusivité thermique;	Nu ,	nombre de Nusselt;
c_p ,	chaleur massique à pression constante;	p ,	pression;
C_p ,	chaleur molaire à pression constante;	P ,	énergie dépensée par effet Joule dans un élément de mesure;
d ,	largeur d'un élément de mesure;	Pr ,	nombre de Prandtl;
D/Dt ,	dérivée particulaire;	S ,	surface de l'élément de mesure;
f_1 ,	fonction de Bromley et Wilke;	T_p, T_e, T_0 ,	températures absolues de la paroi, de l'élément, du fluide au loin;
F ,	fonction tabulée de Pohlhausen;	T^* ,	température de frottement,
F_v ,	forces de viscosité;		$= \frac{h(T_p - T_0)}{c_p \rho_p u^*};$
g ,	accélération;	T^+ ,	température réduite,
Gr ,	nombre de Grashof;		$= \frac{T_p - T}{T^*};$
h ,	coefficient local d'échange de chaleur;	u ,	composante de la vitesse dans la direction verticale Ox ;
H ,	enthalpie massique;	u_m ,	valeur maximale de u ;
k ,	constante de Boltzmann;	u^* ,	vitesse de frottement, $= \sqrt{(\tau_p/\rho_p)}$;
m' ,	masse d'une molécule;	u^+ ,	vitesse réduite (u/u^*);
M ,	masse molaire;	v ,	composante de la vitesse dans la direction Oy perpendiculaire à la plaque;
N_0 ,	nombre d'Avogadro;		

† Ce travail résume une étude effectuée au laboratoire de Thermique de l'ENSM et qui a été présentée pour l'obtention du grade de Docteur ès-Sciences Physiques devant la Faculté des Sciences de Poitiers le 30 mai 1968 (Numéro d'ordre aux archives originales du CNRS: A.O. 2070).

\mathbf{V} ,	vecteur vitesse;
x ,	cote d'un point mesurée au-dessus du bord inférieur de la plaque;
y ,	distance d'un point à la surface de la plaque;
y^* ,	rapport v_p/u^* ;
y^+ ,	distance réduite (y/y^*);
Z ,	limite supérieure de T^+ , $= \frac{c_p \rho_p u^*}{h}$;
β ,	coefficient d'expansion du gaz;
β_D ,	groupement de Deissler,
	$= \frac{h(T_p - T_0)u^*}{c_p \tau_p T_p}$;
δ^+ ,	épaisseur réduite de la couche limite dynamique;
Δ^+ ,	épaisseur réduite de la couche limite thermique;
ε ,	constante de Lennard Jones;
λ ,	conductivité thermique du gaz;
μ, ν ,	viscosité dynamique et cinématique du gaz;
η ,	variable réduite, $= cy/\sqrt{x}$;
Ω_V ,	intégrale de collision;
ϕ ,	densité de flux de chaleur émise sous forme de rayonnement;
Ψ ,	fonction de dissipation;
σ ,	constante de Lennard Jones;
ρ ,	masse volumique du fluide;
τ_p ,	tension pariétale de frottement;
τ_p^+ ,	tension réduite, $= \tau_p x^2 / \mu_0 \nu_0$;
ζ ,	groupement $y/A \sqrt[3]{\chi}$.
Indices	
p ,	sur la plaque;
0 ,	à l'infini.

INTRODUCTION

IL EST courant d'admettre que le transfert de chaleur par convection naturelle turbulente sur une plaque plane verticale placée dans un milieu infini est régi, pour un gaz donné, par une relation de la forme :

$$(1) Nu = k Gr^n.$$

Citons par exemple les relations suivantes :

$$(2) Nu = 0,100 Gr^{1/3} \quad \text{Saunders [1]}$$

$$(3) Nu = 0,117 Gr^{1/3} \quad \text{King [2]}$$

$$(4) Nu = 0,0184 Gr^{2/5} \quad \text{Eckert et Jackson [3]}$$

dans lesquelles λ et μ semblent être exprimées à la température moyenne $0,5(T_p + T_0)$ et où nous constatons une certaine disparité.

En utilisant des moyens nouveaux nous avons tenté de préciser la loi qui relie le coefficient local d'échange de chaleur aux conditions expérimentales, et d'estimer la valeur du coefficient de frottement pariétal, puis nous avons recherché les lois de répartitions de vitesse et de température dans la couche limite, dans le cas où le fluide est de l'air dont la température au loin est voisine de 20°C et circulant devant une plaque plane verticale isotherme dont la température peut atteindre 100°C .

1. ETUDE THEORIQUE DES PARAMETRES DE SIMILITUDE

La recherche des paramètres qui permettent la description du phénomène de convection naturelle devant une plaque verticale isotherme dans une enceinte de grande dimension est faite à partir des équations générales du mouvement. Nous aborderons ensuite, dans le cas plus particulier où le fluide en mouvement est un gaz parfait du point de vue thermodynamique, l'étude des diverses conditions de similitude trouvées.

1.1 Recherche des paramètres de similitude

Le problème est régi par le système classique d'équations générales :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= - \mathbf{grad} p - \rho g \mathbf{grad} x + \mathbf{F}_i \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \rho \frac{DH}{Dt} &= \operatorname{div} (\lambda \mathbf{grad} T) \end{aligned} \right\} (1.1)$$

auquel il convient d'ajouter les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad T = T_p \quad \mathbf{V} = 0 \\ y = \infty \quad T = T_0 \quad u = 0 \end{array} \right\} (1.2)$$

ainsi que les équations d'état.

En posant :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{D_0} & y' &= \frac{y}{D_0} & \mathbf{V}' &= \frac{D_0}{v_0} \mathbf{V} & t' &= \frac{v_0}{D_0^2} t \\ T' &= \frac{T}{T_0} & H' &= \frac{H}{H_0} \text{ (avec } H_0 = c_{p0} T_0) & p' &= \frac{D_0^2}{\rho_0 v_0^2} p \end{aligned}$$

ainsi que

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

les équations (1.1) et (1.2) s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \rho' \frac{D\mathbf{V}'}{Dt'} &= -\mathbf{grad} p' - \frac{g D_0^3}{v_0^2} \rho' \mathbf{grad} x' + \mathbf{F}'_t \\ \frac{D\rho'}{Dt'} + \rho' \operatorname{div} \mathbf{V}' &= 0 \\ \rho' \frac{DH'}{Dt'} &= \frac{\lambda_0}{\mu_0 c_{p0}} \operatorname{div} (\lambda' \mathbf{grad} T') \end{aligned} \right\} (1.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 0 \quad T' = \frac{T_p}{T_0} \quad \mathbf{V}' = 0 \\ y' = \infty \quad T' = 1 \quad u' = 0. \end{array} \right\} (1.4)$$

Les conditions de similitude entre deux écoulements (1) et (2) sont donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_1 D_{01}^3}{v_{01}^2} = \frac{g_2 D_{02}^3}{v_{02}^2} & \quad \frac{T_{p1}}{T_{01}} = \frac{T_{p2}}{T_{02}} & Pr_{01} = Pr_{02} \\ H'_1 = H'_2 & \quad \rho'_1 = \rho'_2 & \mu'_1 = \mu'_2 & \lambda'_1 = \lambda'_2 \end{aligned} \right\} (1.5)$$

1.2 Cas particulier du gaz parfait

Dans le cas particulier où le fluide en mouvement peut être considéré comme un gaz parfait au point de vue thermodynamique, il est

immédiat de vérifier que les conditions sur H' et p' sont satisfaites. Si de plus on fait l'hypothèse que l'énergie potentielle due à l'interaction entre deux molécules distantes de r est donnée par la loi de Lennard Jones [4] :

$$\Psi(r) = 4 \varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (1.6)$$

sa viscosité est donnée selon Bromley et Wilke [5] par :

$$\mu = \frac{5}{16 \sigma^2 \Omega_v} \left(\frac{m' k T}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = K \cdot f_1 \left(\frac{k T}{\varepsilon} \right) \quad (1.7)$$

avec

$$K = \frac{5}{16 \sigma^2} \left(\frac{M \varepsilon}{N_0 \pi} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } f_1 \left(\frac{k T}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\Omega_v} \left(\frac{k T}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et sa conductivité thermique selon Hirschfelder, Curtiss et Bird [6] est donnée par la relation :

$$\lambda = 1,9891 \cdot 10^{-4} \frac{(T/M)^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2 \Omega_v} \quad (1.8)$$

A partir de ces relations il est facile de voir que la viscosité réduite et la conductivité réduite sont égales :

$$\mu' = \lambda' = \frac{\Omega_{v0}}{\Omega_v} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (1.9)$$

et par conséquent les deux conditions de similitude relatives à la viscosité et à la conductivité thermique du fluide se confondent.

Il nous suffit d'en étudier une seule, par exemple celle relative à la viscosité

Reprenons l'équation (1.7). Puisque K ne dépend que de l'espèce chimique la viscosité réduite peut s'écrire :

$$\mu' = \frac{f_1 \left(\frac{k T}{\varepsilon} \right)}{f_1 \left(\frac{k T_0}{\varepsilon} \right)} \quad (1.10)$$

et en deux points homologues de deux écoulements (1) et (2) la condition $\mu'_1 = \mu'_2$ devient :

$$\frac{f_1 \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_1 T_{01} \theta \right]}{f_1 \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_1 T_{01} \right]} = \frac{f_1 \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_2 T_{02} \theta \right]}{f_1 \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \right)_2 T_{02} \right]} \quad (1.11)$$

avec $\theta = T'_1 = T'_2$.

Cette condition est satisfaite quelle que soit la forme de la fonction f_1 si :

$$\frac{T_{01}}{\varepsilon_1} = \frac{T_{02}}{\varepsilon_2} \quad (1.12)$$

Le rapport T_0/ε est un nouveau paramètre de similitude, mais il convient de remarquer que la relation (1.11) est aussi satisfaite si la fonction f_1 est de la forme :

$$f_1(z) = az^n \quad (1.13)$$

a et n étant deux constantes. Donc si la fonction $f_1(kT/\varepsilon)$ peut être considérée comme satisfaisant la relation (1.13), tout au moins dans un domaine convenable de variation de kT/ε , on pourra dans ce domaine considérer que cette dernière condition de similitude est satisfaite même si la relation (1.12) ne l'est pas.

Or la fonction $f_1(kT/\varepsilon)$ a été tabulée par Hirschfelder comme nous l'avons indiqué et il est facile de montrer qu'elle diffère peu d'une fonction puissance à l'intérieur d'intervalles de variations même assez grands. Par exemple dans l'intervalle $3 < kT/\varepsilon < 4$ on peut remplacer f_1 par la fonction :

$$f_2 = 0,7398 \left(\frac{kT}{\varepsilon} \right)^{0,7436} \quad (1.14)$$

avec un écart relatif inférieur à 0,1 pour cent.

On peut dire que si la condition rigoureuse de similitude $T_{01}/\varepsilon_1 = T_{02}/\varepsilon_2$ n'est pas satisfaite on peut s'en affranchir de façon d'autant plus légitime que toutes les valeurs des rapports kT_1/ε_1 et kT_2/ε_2 qui interviennent dans les deux problèmes se trouvent dans un intervalle plus réduit et il sera possible de trouver pour cet intervalle quelle est parmi toutes les fonctions $f_2 = a(kT/\varepsilon)^n$ celle qui se rapproche le plus de

la courbe de Bromley et Wilke. Il suffit pour cela de déterminer les valeurs numériques de deux constantes a et n à partir des valeurs de la table de Hirschfelder en utilisant la méthode des moindres carrés.

Par ailleurs dans le cas où l'on prend pour équations d'état relatives à la viscosité et à la conductivité les relations (1.7) et (1.8) le nombre de Prandtl s'écrit :

$$Pr = 1571 \cdot \sqrt{\left(\frac{k}{\pi N_0} \right)} \cdot M \cdot c_{p0} = K' \cdot C_{p0}$$

C_{p0} étant la chaleur molaire à pression constante et K' une constante.

L'égalité des nombres de Prandtl se réduit donc alors à l'égalité des chaleurs molaires à pression constante des gaz parfaits considérés. On sait que ceci est réalisé dans de larges intervalles de température pour des gaz de même atomicité.

En résumé dans l'hypothèse où les gaz étudiés se comportent comme des gaz parfaits les cinq premières conditions de similitude (1.5) trouvées au paragraphe (1.1) peuvent se réduire à :

$$\frac{g_1 D_{01}^3}{v_{01}^2} = \frac{g_2 D_{02}^3}{v_{02}^2}$$

$$C_{p01} = C_{p02}$$

$$\frac{T_{p1}}{T_{01}} = \frac{T_{p2}}{T_{02}}$$

Les conditions introduites par la viscosité et la conductivité imposent en plus :

$$\frac{T_{01}}{\varepsilon_1} = \frac{T_{02}}{\varepsilon_2}$$

mais nous avons vu que bien souvent cette condition peut être légitimement levée.

Nous verrons que notre étude expérimentale fait apparaître effectivement les groupements sans dimension gD_0^3/v_0^2 (sous la forme gx^3/v_0^2) et T_p/T_0 . Le rôle du nombre de Prandtl n'a pas pu être mis en évidence car dans le domaine étudié il reste pratiquement constant.

1.3 Remarque—nombre de Grashof

Dans le cas où la différence de température $T_p - T_0$ est petite il est aisé de montrer que le paramètre de similitude introduit par l'équation de l'impulsion est le nombre de Grashof au lieu du groupement gD_0^3/ν_0^2 qui apparaît dans le cas général d'un écart de température quelconque [7].

2. LES METHODES EXPERIMENTALES

2.1 Le système

La plaque utilisée a une largeur de 0,50 m et une hauteur 1,03 m. Sa façade est en cuivre rouge recouvert d'un vernis destiné à assurer un coefficient d'émission ϵ constant. Cette plaque est placée dans une enceinte de grandes dimensions (10 × 8 × 3 m). Elle est portée à une température uniforme au moyen d'une circulation accélérée d'eau chaude.

2.2 Mesure locale directe du flux de chaleur cédée par la plaque

Nous avons utilisé une méthode proposée en 1957 par Cordier [8] pour la détermination des coefficients locaux d'échange de chaleur en convection forcée. Dans l'étude de la convection naturelle cette méthode qui s'est encore avérée très précise a l'avantage de ne pas exiger l'introduction de sonde dans la couche limite et ainsi ne modifie ni l'écoulement ni le transfert de chaleur étudié.

Six éléments de mesure ont été placés dans la maquette aux cotes suivantes : $x = 26,75; 36,75; 46,75; 56,75; 66,75; 76,75$ cm.

L'erreur relative commise sur la quantité de chaleur perdue par la plaque est inférieure à 3 pour cent [7]. Le coefficient d'émission a été mesuré dans le vide.

2.3 Mesure locale de la tension pariétale de frottement

Pour déterminer le flux de chaleur cédée par la plaque on dépense par effet Joule une certaine puissance P . Cette puissance correspond exactement au flux d'énergie cherché si la température de l'élément prend la valeur T_p de la température de la plaque. Au contraire si cette puissance P

est différente de la valeur précédente P_0 la température T_e prise par la surface de l'élément diffère de T_p d'une quantité ΔT_p . Nous avons constaté qu'il existe une relation linéaire entre P et ΔT_p et on peut établir une relation entre la pente de la droite qui représente les variations de P en fonction de ΔT_p et la tension pariétale de frottement.

2.3(1) Etude théorique de la perturbation créée dans la couche limite par la surface d'un élément de mesure qui n'est pas exactement à la température de la plaque. Soit une plaque à température uniforme qui cède de la chaleur à un fluide par convection à travers une couche limite laminaire. La répartition de température vérifiée dans l'approximation de la couche limite thermique l'équation :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

ainsi que les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} y = 0 \quad \text{et } x \text{ quelconque} \quad T &= T_p \\ y = \infty \quad T &= T_0 \end{aligned} \right\} \tag{2.2}$$

u et v étant les composantes de la vitesse dans les directions Ox et Oy respectivement, solutions des équations de Navier et de continuité. Soit $T_1(x, y)$ la solution de ce problème. Supposons qu'entre les abscisses $x = l$ et $x = l + d$ la température de la plaque soit portée à la valeur $T_p + \Delta T_p$. Si ΔT_p et d sont petits il est évident que le champ de vitesse ne sera pas modifié et en raison de la linéarité de l'équation (2.1), la répartition de température en face de la plaque perturbée s'obtiendra en ajoutant à la solution $T_1(x, y)$ la solution $T_2(x, y)$ de l'équation (2.1) considérée avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{aligned} y = 0 \quad \text{et} \quad x < l \quad T_2 &= 0 \\ y = 0 \quad \text{et} \quad l < x < l + d \quad T_2 &= \Delta T_p \\ y = 0 \quad \text{et} \quad x > l + d \quad T_2 &= 0 \\ y = \infty \quad T_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.2'}$$

2.3(2) *Calcul de la fonction* $T_2(x, y)$. En posant $X = x - l$ l'équation aux dérivées partielles (2.1) s'écrit :

$$u \frac{\partial T_2}{\partial X} + v \frac{\partial T_2}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

et les conditions aux limites (2.2') deviennent

$$\begin{aligned} y = 0 \quad \text{et} \quad X > 0 \quad T_2 &= \Delta T_p \\ y = \infty \quad T_2 &= 0. \end{aligned}$$

On peut montrer que $v \partial T_2 / \partial y$ est petit par rapport à $u \partial T_2 / \partial X$ si d est petit devant l et puisque dans la région étudiée (couche limite de perturbation), compte tenu de l'hypothèse que son épaisseur δ est petite devant l'épaisseur Δ de la couche limite principale, le profil des vitesses est, aux termes du second ordre près :

$$u = \frac{\tau_p}{\mu_p} y \quad v = w = 0 \quad (2.4)$$

et l'équation (2.3) s'écrit en posant : $k = \tau_p / \mu_p$

$$ky \frac{\partial T_2}{\partial X} = a \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

En posant $\zeta = \frac{y}{A \sqrt[3]{X}}$ et $B = \frac{kA^3}{3a}$.

(A étant une constante) cette équation admet pour solution :

$$T_2 = \frac{\int_0^\zeta \exp \left[-\frac{B}{3} z^3 \right] dz}{0,893 \sqrt[3]{\frac{3}{B}}} \quad (2.6)$$

2.3(3) *Relation entre la quantité de chaleur cédée par l'élément de mesure et le frottement pariétal.* La quantité de chaleur qui quitte une bande d'envergure unité de l'élément est

$$q = \int_0^a \lambda_p \frac{\Delta T_p \exp \left(-\frac{B}{3} \zeta^3 \right)}{A(\sqrt[3]{X}) \int_0^\infty \exp \left(-\frac{B}{3} \zeta^3 \right) d\zeta} . dX \quad (2.7)$$

pour $\zeta = 0$ et la quantité de chaleur cédée par l'élément de surface S dans le cadre de la perturbation apportée par ΔT_p est

$$Q = \frac{3 \lambda_p k^{\frac{1}{3}} S}{2 \cdot 0,893 \sqrt[3]{(9ad)}} \cdot \Delta T_p \quad (2.8)$$

Or la valeur absolue de la contrainte de cisaillement τ_p est

$$\tau_p = \mu_p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu_p \cdot k \quad (2.9)$$

d'où en éliminant k entre (2.8) et (2.9) :

$$\frac{Q}{\Delta T_p} = \frac{3 \lambda_p S}{2 \cdot 0,893 \sqrt[3]{(9ad)}} \cdot \left(\frac{\tau_p}{\mu_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.10)$$

2.3(4) *Relation entre* $Q/\Delta T_p$ *et la pente de la droite* $P = P(\Delta T)$. La quantité de chaleur P_0 fournie par effet Joule à un élément de mesure pour que sa température soit T_p se dissipe par convection (q_v) et par rayonnement (q_r). Quand la quantité de chaleur fournie P est différente de P_0 la température de l'élément prend une valeur T_e légèrement différente de celle de la plaque T_p . Une certaine quantité de chaleur q_d passe de l'élément vers la plaque par conduction et à l'extérieur tout se passe comme si q_v et q_r n'étant pas modifiées une quantité de chaleur q_p , que nous appellerons quantité de chaleur de perturbation, est fournie par l'élément. Cette dernière n'est autre que la grandeur Q calculée au paragraphe précédent.

Le bilan thermique de l'élément s'écrit alors :

$$P = q_r + q_v + q_d + q_p$$

et en posant

$$q_d = \Lambda S(T_e - T_p) = \Lambda S \cdot \Delta T_p$$

il vient :

$$\frac{Q}{\Delta T_p} = \frac{P - P_0}{\Delta T_p} - \Lambda S \quad (2.11)$$

où $(P - P_0)/\Delta T_p$ est la pente de la droite $P = P(\Delta T_p)$. Il est alors immédiat d'après les relations

précédentes que :

$$\frac{P - P_0}{\Delta T_p} = AS + \frac{3}{2} \frac{\lambda_p S}{0,893 \sqrt[3]{9ad}} \left(\frac{\tau_p}{\mu_p} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.12)$$

Il est donc possible de déterminer τ_p en utilisant les éléments de mesure de la puissance thermique (P_0) dissipée par la plaque en provoquant un déséquilibre de température ΔT_p pourvu que la constante A soit connue par étalonnage.

2.4 Exploration de la couche limite

La mesure des températures dans la couche limite a été effectuée au moyen d'un couple thermoélectrique de faible diamètre tendu entre les bras d'un étrier et supporté par un chariot dont le déplacement était commandé à distance. Les mesures de la force électro-motrice correspondante sont relevées sur divers enregistrements et les températures en sont déduites après correction de l'influence du rayonnement entre la plaque et les parois de la salle d'une part et le fil du couple d'autre part.

Les mesures de la composante verticale de la vitesse ont été faites à l'aide d'un microtube de Pitot supporté par le même chariot que la sonde thermique. Les deux prises de pression du tube de Pitot sont reliées à un manomètre différentiel de haute sensibilité [9] qui permet d'apprécier des variations de pression de $2 \cdot 10^{-6}$ Torr. Les erreurs introduites par l'importance relative de la viscosité par rapport à la petitesse de la vitesse mesurée ont été estimées à partir des travaux de Shermann [10].

2.5 Détermination de la limite inférieure de la zone turbulente

Nous avons retenu un critère qui fait appel à une méthode de visualisation par une méthode d'ombres, due à Pearcey [11] et décrite par Holder [12]: Nous convenons de dire que l'écoulement devient turbulent au niveau du point A (de cote x_A) à partir duquel un filet lumineux semble collé sur l'ombre de la plaque.

3. LES RESULTATS

Pour l'ensemble de nos expériences la température T_p de la plaque a varié entre 40 et 100°C tandis que la température T_0 de l'air au loin est restée voisine de 20°C.

3.1 Position de la limite inférieure de la zone turbulente

La cote x_A du point A , origine conventionnelle de la zone turbulente, est telle que le nombre de Grashof

$$Gr_{x_0} = \frac{g(T_p - T_0) x_A^3}{T_0 \nu_0^2}$$

évolue en fonction du rapport T_p/T_0 (températures exprimées en degrés Kelvin) suivant la relation :

$$Gr_{x_0} = 1,462 \cdot 10^9 \left(\frac{T_p}{T_0} \right)^{-8,352} \quad (3.1)$$

3.2 Valeur du coefficient local d'échange de chaleur par convection naturelle

Le coefficient local d'échange a été déterminé au moyen des éléments de mesure et les résultats obtenus se recoupent avec ceux que l'on obtient grâce à l'exploration de la couche limite.

3.2(1) *Cas de l'écoulement laminaire.* Quoique notre dispositif expérimental ne permet pas de faire des mesures très précises quand l'écart de température $T_p - T_0$ est petit nous avons pu obtenir, quelques résultats dans le cas où l'écoulement est laminaire [13]. De cette étude nous pouvons conclure dans le cas de l'air que :

(a) pour des écarts de température $T_p - T_0$ de l'ordre de 25°C on peut utiliser indifféremment les valeurs de λ et ν prises pour les températures T_p ou T_0 sans modifier la forme de la loi $Nu_x = f(Gr_x)$;

(b) cette loi s'écrit :

$$Nu_x = K \cdot Gr_x^{0,25} \quad (3.2)$$

avec $K = 0,385 \pm 0,006$.

3.2(2) *Cas de l'écoulement turbulent.* Les mesures faites dans la zone où l'écoulement est

turbulent conduit à mettre en évidence [14] les résultats suivants.

Dans le domaine étudié il existe entre le nombre de Nusselt $Nu_{x_0} = hx/\lambda_0$, le nombre de Grashof $Gr_{x_0} = gx^3(T_p - T_0)/T_0\nu_0^2$ et le rapport $(T_p - T_0)/T_0$ la relation (Fig. 1):

$$Nu_{x_0} = A \left(\frac{T_p - T_0}{T_0} \right)^n (Gr_{x_0})^m \quad (3.3)$$

Dans le domaine étudié il est possible d'exprimer avec une précision meilleure que 10 pour cent les valeurs trouvées expérimentalement de la tension de frottement à la paroi en fonction du groupement gx^3/ν_0^2 et du rapport T_p/T_0 par une relation de la forme (Fig. 2):

$$\tau'_p = A + B \frac{gx^3}{\nu_0^2} \quad (3.5)$$

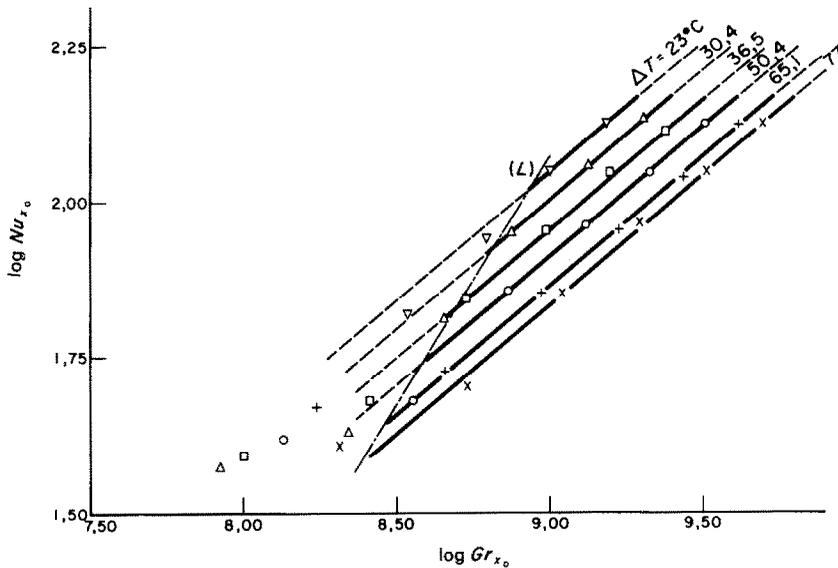


FIG. 1. Echange de chaleur en régime turbulent en fonction de Gr_{x_0} .

avec $m = 0,410 \pm 0,004$ et $n = -0,413 \pm 0,003$. avec

Les deux constantes m et n sont pratiquement opposées et la relation précédente peut s'écrire :

$$Nu_{x_0} = 0,00811 \left(\frac{gx^3}{\nu_0^2} \right)^{0,41} \quad (3.4)$$

$$A = -0,56 \cdot 10^8 + 0,50 \cdot 10^8 \frac{T_p}{T_0}$$

$$B = 29 \cdot 10^{-4} \left(\frac{T_p}{T_0} - 1 \right).$$

3.3 Valeur de la tension pariétale de frottement

L'étude du frottement pariétal sur la plaque a fait appel d'une part à la méthode exposée au paragraphe (2.3) et d'autre part à l'exploitation classique des courbes de répartition de vitesse et de température et nous avons vérifié le bon accord des deux méthodes.

4. RECHERCHE DES LOIS DE REPARTITION DE VITESSE ET DE TEMPERATURE

Les Figs. 3-8 représentent l'ensemble de nos résultats. Ceux-ci sont relatifs à des valeurs de x égales à 52; 63; 88 et 103 cm et de $T_p - T_0$ égales à 37; 59 et 75°C. Afin de pouvoir les comparer avec ceux donnés par d'autres auteurs

ils sont présentés dans un système de coordonnées sans dimension. En abscisse l'unité de longueur est arbitraire et choisie dans chaque cas de telle façon que les courbes de répartition

résultats il faut multiplier l'abscisse de chaque point des Figs. 3-5 (répartition de vitesse) par une constante k_1 et des Figs. 6-8 (répartition de température) par une constante k_2 . Ces deux constantes ainsi que la valeur u_m du maximum de la vitesse sont données dans le Tableau 1.

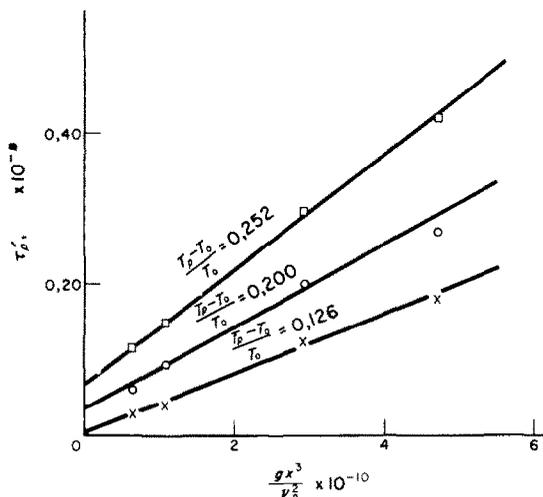


FIG. 2. Contrainte pariétale de cisaillement.

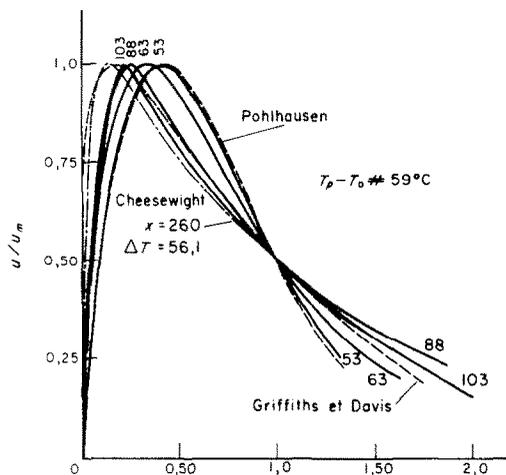


FIG. 5. Répartitions de vitesse.

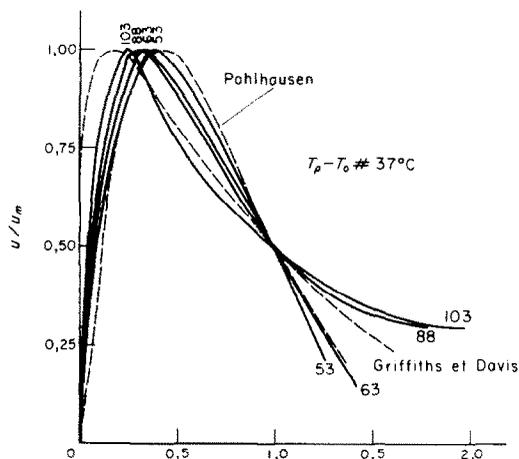


FIG. 3. Répartitions de vitesse.

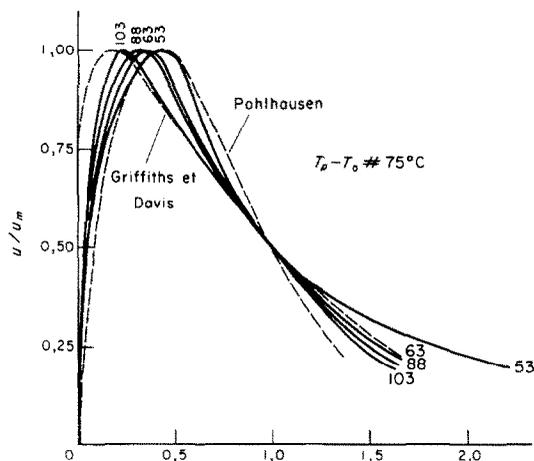


FIG. 4. Répartitions de vitesse.

de vitesse passent par le point d'abscisse 1 quand le rapport u/u_m prend la valeur 0,5 (après être passé par son maximum) et que les courbes de répartition de température passent par le point d'abscisse 1 lorsque le rapport $(T - T_0)/(T_p - T_0)$ prend la valeur 0.2.

Pour obtenir les courbes représentant nos

Sur ces graphiques figurent également des résultats des travaux de Schmidt et Beckmann [15], exploités par E. Pohlhausen, de Griffiths et Davis [16] et de Cheesewright [17].

4.1 Examen des courbes de répartition des vitesses et de température

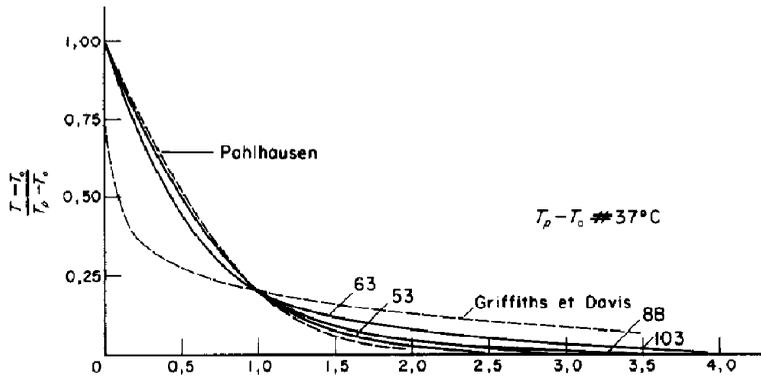


FIG. 6. Répartitions de température.

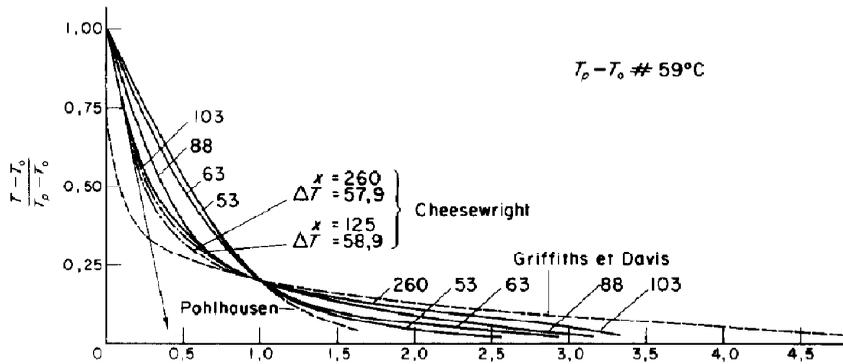


FIG. 7. Répartitions de température.

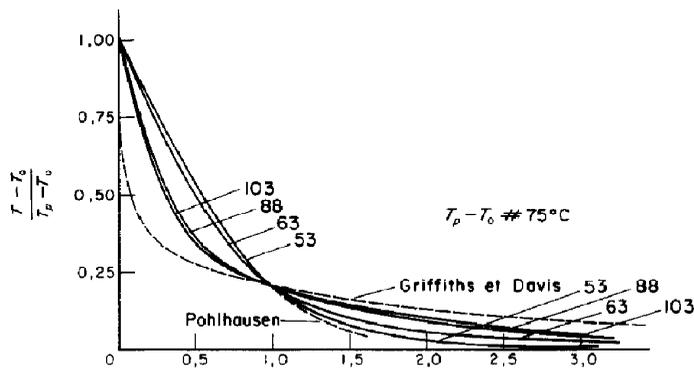


FIG. 8. Répartitions de température.

Tableau 1

$T_p - T_0$	x	k_1	k_2	u_m (cm/s)	u^* (cm/s)	y^* (cm)	T^* (°C)	β_D
37	53	1,19	0,89	47,0	4,86	0,0391	2,96	0,0100
	63	1,32	0,90	50,1	5,32	0,0357	2,81	0,0095
	88	1,49	1,00	54,4	6,30	0,0302	2,56	0,0086
	103	1,98	1,26	56,0	6,90	0,0275	2,43	0,0082
59	53	1,18	0,89	50,4	8,00	0,0263	3,04	0,0096
	63	1,39	0,95	53,1	7,94	0,0264	3,18	0,0100
	88	2,12	1,34	58,4	8,30	0,0252	3,29	0,0104
	103	2,72	1,61	62,0	8,36	0,0250	3,39	0,0108
75	53	1,05	0,83	66,2	10,80	0,0209	3,01	0,0091
	63	1,36	0,90	69,2	10,80	0,0209	3,13	0,0094
	88	1,79	1,33	69,6	10,80	0,0209	3,39	0,0103
	103	2,59	1,49	71,4	10,80	0,0209	3,51	0,0107

4.1(1) *Courbes de répartition de vitesse.* On constate, en examinant les Figs. 3-5, une déformation progressive et assez régulière de ces courbes en fonction de x . On remarque en particulier que la distance de la paroi au point où la vitesse est maximum diminue quand x augmente.

Il est remarquable que la courbe relative à un écoulement laminaire (courbe de Pohlhausen) se trouve à une extrémité de l'éventail tandis que la courbe de Griffiths et Davis se trouve à l'autre extrémité. Remarquons cependant qu'il ne faut peut-être pas attacher trop d'importance à cette dernière car nous ignorons les conditions expérimentales de leur travail et Eckert et Jackson signalent que la loi empirique qu'ils proposent s'accorde médiocrement avec les points expérimentaux qu'elle est censée représenter.

4.1(2) *Courbes de répartition de température.* Les graphiques 6 à 8 montrent également une déformation régulière des courbes représentant la variation de $(T - T_0)/(T_p - T_0)$ depuis celle qui représente l'écoulement laminaire selon Pohlhausen jusqu'à celle de Griffiths et Davis quand x augmente.

L'étude des déformations de toutes ces courbes montre qu'il n'est pas possible de les traduire par une équation simple et nous devons signaler que toutes les tentatives que nous avons

faites pour les exprimer simplement en utilisant le nombre de Grashof ont échoué. Mais en utilisant les grandeurs dites de frottement u^* et T^* et en remplaçant les grandeurs u , T et y par les grandeurs sans dimension u^+ , T^+ et y^+ nous avons mis en évidence des relations simples qui rendent compte des répartitions relevées expérimentalement. Ces relations ressemblent aux lois de répartitions universelles bien connues en convection forcée. Elles montrent l'influence de divers paramètres et expliquent l'évolution régulière du phénomène.

4.2 *Lois de répartition de vitesse*

Pour chaque couple de valeurs de $T_p - T_0$ et de x nous avons représenté dans les deux plans (y^+, u^+) et $(\log y^+, u^+)$ l'ensemble des relevés obtenus. Les Figs. 9 et 10 sont un exemple des représentations ainsi trouvées.

L'examen des graphiques ainsi réalisés montre l'on peut diviser l'épaisseur de la couche limite en trois zones (Fig. 11):

- (1) une région interne (I) où la relation théorique.

$$u^+ = y^+ \tag{4.1}$$

est bien vérifiée compte tenu des erreurs de mesure. L'épaisseur de cette zone est de l'ordre de $y^+ = 3$.

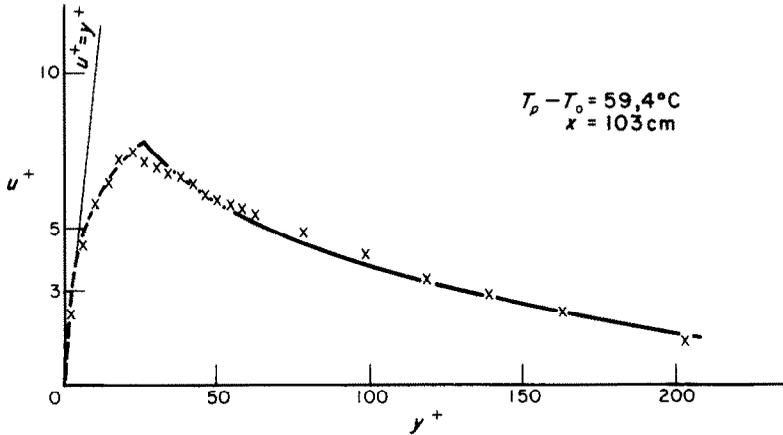


FIG. 9. Exemple d'une répartition de vitesse réduite.

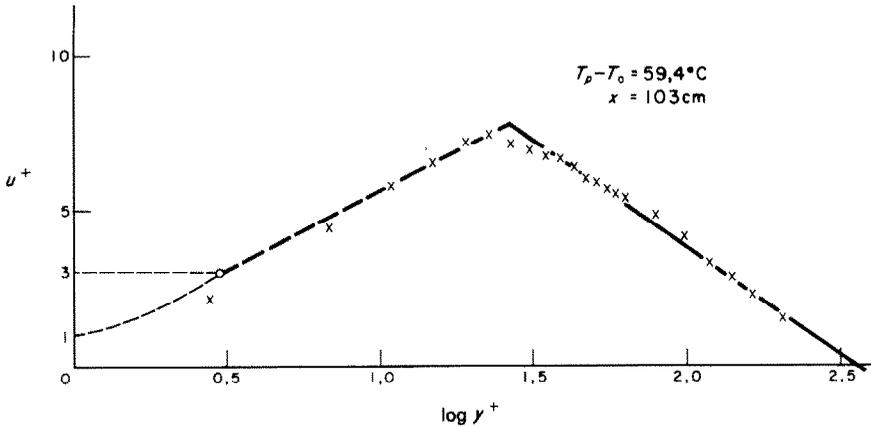


FIG. 10. Exemple d'une répartition de vitesse réduite.

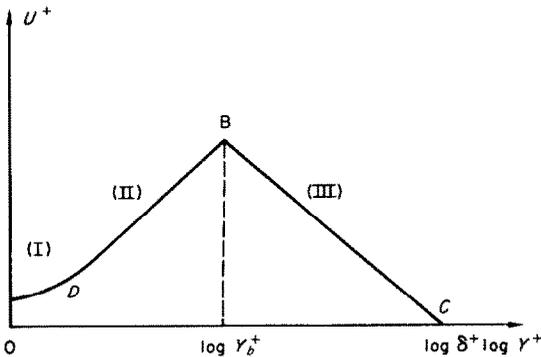


FIG. 11. Représentation schématique de la couche limite dynamique.

- (2) une région intermédiaire (II) où u^+ croît linéairement en fonction de $\log y^+$.
- (3) une région externe (III) où u^+ décroît linéairement en fonction de $\log y^+$.

4.2(1) *Etude de la zone externe (III).* On appelle $\log \delta^+$ l'abscisse du point (C) où la droite qui porte le segment représentant la répartition de vitesse réduite dans cette zone coupe l'axe ($0, \log y^+$) et p la pente de ce segment (BC).

La comparaison des valeurs de $\log \delta^+$ aux valeurs du nombre de Grashof Gr_{x_0} correspondant (Fig. 12) conduit à admettre que δ^+ ne dépend que de Gr_{x_0} :

$$\delta^+ = 0,665 \cdot 10^{-4} (Gr_{x_0})^{0,673}. \quad (4.2)$$

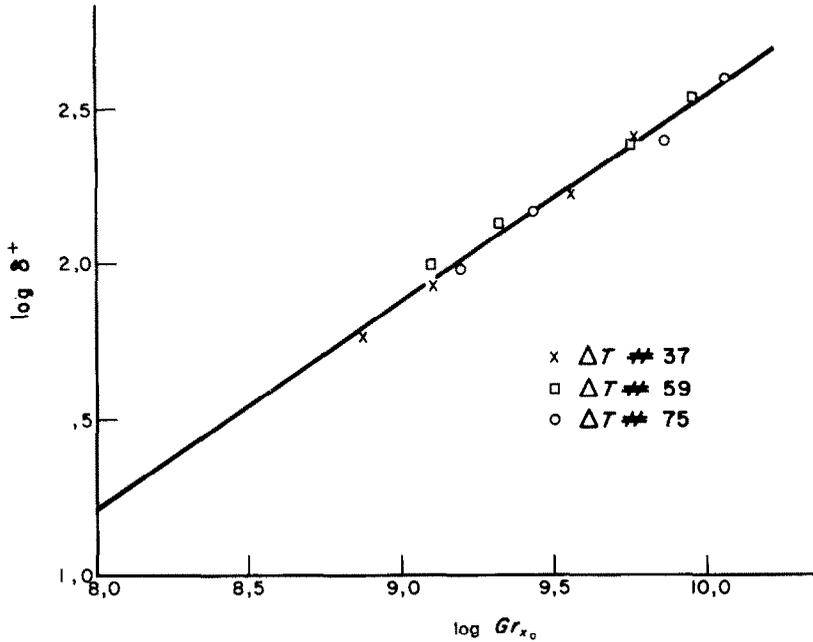


FIG. 12. Variation de l'épaisseur de la couche limite dynamique.

L'étude de la pente du segment *BC* en fonction du nombre de Grashof correspondant conduit à suggérer la relation :

$$p = -561(Gr_{x_0})^{-0,192}. \quad (4.3)$$

Donc la droite *BC*, entièrement définie par le point *C* et sa pente ne dépend que du nombre de Grashof Gr_{x_0} .

4.2(2) *Etude de la zone intermédiaire II.* La zone intermédiaire peut être représentée dans le plan (u^+ , $\log y^+$) par un segment *DB*. Celui-ci est caractérisé par le point *D* de coordonnées $u^+ = y^+ = 3$ et par le point *B*.

L'abscisse du point *B* dépend de Gr_{x_0} , $T_p - T_0$ et x . On constate que l'ensemble des points déduits des expériences se placent pratiquement aux intersections de deux faisceaux de droites :

Le premier (x constant) a pour équation générale :

$$\log y_b^+ = 1 + \frac{Gr_{x_0} \cdot 10^{-8} - 3}{7 \cdot 10^{-7}} \left(\frac{gx^3}{v_0^2} \right)^{-0,793}. \quad (4.4)$$

Le second faisceau ($T_p - T_0$ constant) est composé de droites parallèles. Son équation générale est :

$$\log y_b^+ = 2 Gr_{x_0} \cdot 10^{-11} + 1,464 \frac{T_p}{T_0} - 0,512. \quad (4.5)$$

Remarquons que ces deux relations ne sont pas identiques. Elles ne font que donner des valeurs numériques approchées de $\log y_b^+$ de façon satisfaisante dans le domaine étudié. Elles montrent que le point *B* est défini par deux paramètres ; le nombre de Grashof Gr_{x_0} et un groupement T_p/T_0 ou gx^3/v_0^2 .

Le point *B* est entièrement défini comme étant le point de la droite *BC* qui a pour abscisse $\log y_b^+$. A l'aide des relations précédentes on peut donc calculer la valeur correspondante u_b^+ de la vitesse réduite. Il est certain que u_b^+ est supérieure à la valeur maximum de la vitesse u_m^+ et n'a aucune signification physique. On peut cependant vérifier que l'écart relatif ne dépasse jamais 8 pour cent.

4.3 Lois de répartition de température

Les répartitions de températures trouvées peuvent être représentées dans les deux systèmes de coordonnées réduites (y^+, T^+) et ($\log y^+, T^+$). Les Figs. 13 et 14 sont un exemple de ces représentations.

L'étude des graphiques ainsi construits montre que là encore on peut envisager une division de la couche limite en trois zones (Fig. 15).

- (1) Une région interne (I) où la relation théorique

$$T^+ = Pr \cdot y^+$$

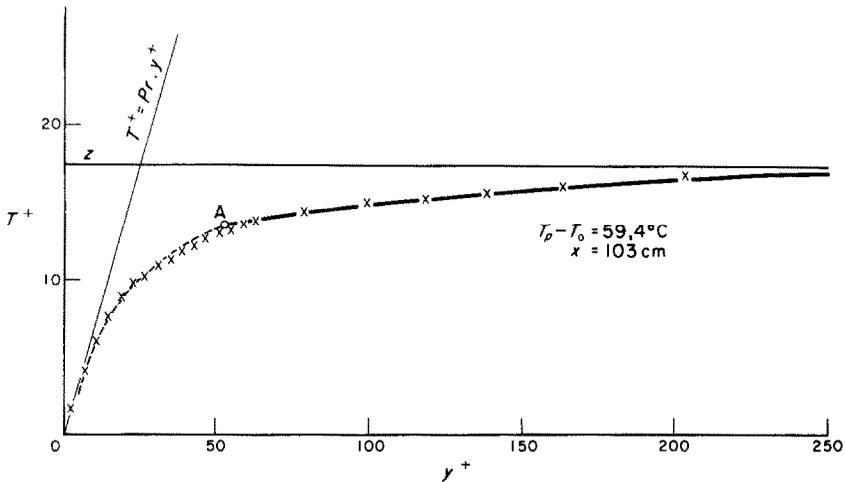


FIG. 13. Exemple d'une répartition de température réduite.

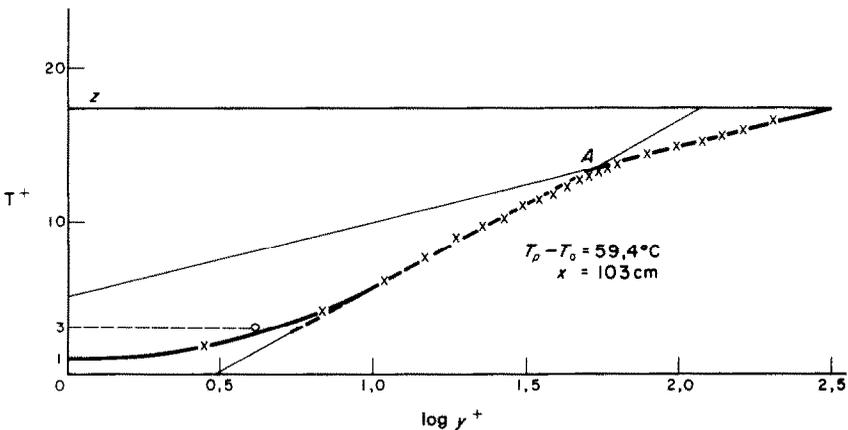


FIG. 14. Exemple d'une répartition de température réduite.

est bien vérifiée compte tenu des erreurs de mesure dans une région d'épaisseur $y^+ = 3/Pr$.

- (2) Une région intermédiaire dans la plus grande partie de laquelle T^+ croît linéairement en fonction de $\log y^+$.
- (3) Une région externe (III) où T^+ croît linéairement en fonction de $\log y^+$.

4.3(1) Etude de la zone externe III. L'épaisseur Δ^+ de la couche limite thermique est définie par l'abscisse $\log \Delta^+$ du point (E) où la droite qui porte le segment (AE) représentant la répartition de température réduite dans cette zone coupe la droite d'ordonnée $Z = c_p \rho_p u^*/h$, qui est la

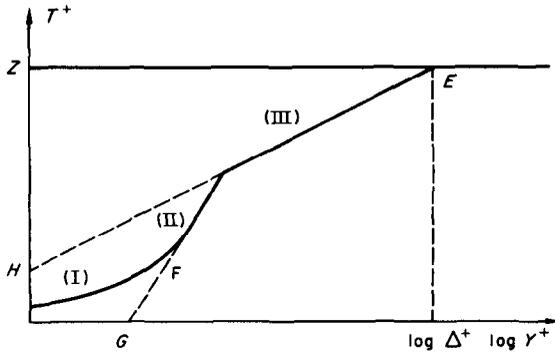


FIG. 15. Représentation schématique de la couche limite thermique.

limite supérieure de T^+ . Soit p_2 la pente du segment AE et H le point où le prolongement de celui-ci coupe l'axe OT^+ . Il apparaît que l'on peut admettre entre Δ^+ et Gr_{x_0} la relation :

$$\Delta^+ = 0,770 \cdot 10^{-4} Gr_{x_0}^{0,659}. \quad (4.6)$$

L'épaisseur Δ^+ ne dépend donc que du nombre de Grashof Gr_{x_0} (Fig. 16). En utilisant un para-

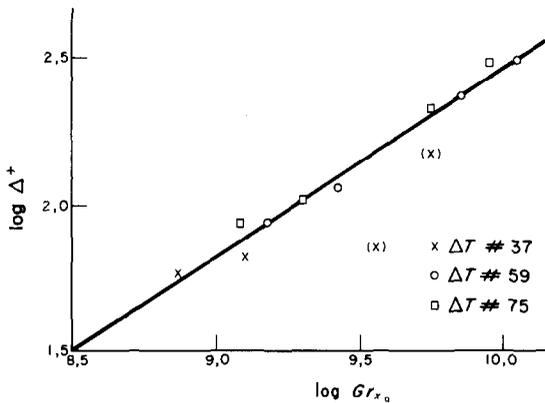


FIG. 16. Variation de l'épaisseur de la couche limite thermique.

mètre déjà introduit par Deissler [18] dans une étude de convection forcée où on considère les variations des propriétés physiques des fluides en fonction de la température :

$$\beta_D = \frac{h(T_p - T_0) u^*}{c_p \tau_p T_p}$$

on peut mettre en évidence la relation :

$$p_2 = (124,5 - 9220 \beta_D) \left(\frac{T_p}{T_0} - 1 \right) \quad (4.7)$$

Le prolongement du segment AE coupe l'axe OT^+ au point H d'ordonnée T_0^+ . On remarque que T_0^+ est très sensiblement constant, indépendant de x , de T_p/T_0 et de β_D :

$$T_0^+ = 4,5. \quad (4.8)$$

Par suite les droites AE ont pour équation générale :

$$T^+ = 4,5 + \left(\frac{T_p}{T_0} - 1 \right) (124,5 - 9220 \beta_D) \log y^+. \quad (4.9)$$

En résumé la droite AE dépend des deux paramètres β_D et T_p/T_0 . Il en est de même de la cote Z du point E alors que son abscisse ne dépend que du nombre de Grashof Gr_{x_0} .

4.3(2) *Etude de la zone intermédiaire.* La partie centrale de la courbe $T^+ = f(\log y^+)$ est pratiquement linéaire et peut être assimilée à un segment de droite (FA). Soit G le point d'abscisse g^+ où ce segment coupe l'axe ($0, \log y^+$) et p_1 la pente de celui-ci.

On peut facilement vérifier que les trois grandeurs g^+ , T_p/T_0 et β_D sont liées par la relation :

$$\log g^+ = -5,266 + 874 \beta_D - 5,20 \cdot 10^4 \beta_D^2 + 2,051 \frac{T_p}{T_0} \quad (4.10)$$

et que

$$p_1 = \left[-658 + 188 \cdot 10^3 \beta_D - 11,35 \cdot 10^6 \beta_D^2 \right] \times \left(\frac{T_p}{T_0} - 1 \right). \quad (4.11)$$

La droite FA est ainsi définie entièrement par les deux paramètres T_p/T_0 et β_D .

4.3(3) *Remarque.* Les courbes tracées sur les Figs. 9 et 13 sont les transformées des divers segments figurant sur les Figs. 10 et 14. Il est ainsi possible d'apprécier l'approximation avec

laquelle les fonctions proposées ci-dessus représentent les relevés expérimentaux. D'une manière générale on remarque ainsi que la représentation logarithmique de la température réduite dans la zone intermédiaire n'est acceptable que si y^+ est supérieure à une valeur limite comprise entre 10 et 20 suivant les cas. Il existe donc pour les valeurs de y^+ supérieures à 4 et inférieures à cette limite une zone qui reste inconnue mais où la température réduite évolue suivant une courbe régulière qui raccorde la courbe $T^+ = Pr \cdot y^+$ à la droite FA .

4.4 Conclusion

Ce travail conduit donc à proposer, pour le domaine étudié, un ensemble de relations qui permettent de construire avec une bonne précision les courbes de répartition de vitesse et de température dans une couche limite turbulente qui s'établit par convection naturelle devant une plaque verticale isotherme placée dans l'air.

BIBLIOGRAPHIE

1. O. A. SAUNDERS, The effect of pressure upon natural convection in air, *Proc. R. Soc.*, **157**, 278–291 (1936).
2. W. J. KING, The basic laws and data of heat transmission, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **54**, 347–353 (1932).
3. E. R. G. ECKERT and T. W. JACKSON, Analysis of turbulent free convection boundary layer on flat plate, NACA—Report No. 1015 (1951).
4. R. C. REID et T. K. SHERWOOD, *The Properties of Gases and Liquids—Chemical Engineering Series*, p. 182, McGraw-Hill, New York (1958).
5. L. A. BROMLEY et C. R. WILKE, *Ind. Engng Chem.* **43**, 1641 (1951).
6. J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS et R. B. BIRD, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, John Wiley, New York (1954).
7. J. COUTANCEAU, Contribution à l'étude de la convection naturelle sur une plaque verticale isotherme, Thèse Doctorat ès Sciences Physiques, Poitiers, Archives du CNRS no. A.O. 2070 (1968).
8. H. CORDIER, Une nouvelle méthode de mesure des coefficients locaux de convection, *Notes techniques du Ministère de l'Air* (Mars 1958).
9. J. L. PEUBE, Ecoulement d'une mince couche de fluide sur une paroi presque horizontale—Applications, Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Paris (1965).
10. F. S. SHERMAN, New experiments on impact pressure interpretation in supersonic and subsonic rarefied air streams, NACA Report no. 2995 (1953).
11. H. H. PEARCEY, The indication of boundary layer transition on aerofoils in the N.P., 20 in. by 8 in. high-speed tunnel, *A.R.C.C.P.* 10 (1950).
12. D. W. HOLDER, Schlieren methods, National Physical Laboratory, Teddington (1963).
13. J. COUTANCEAU, Mesure directe du coefficient local d'échange de chaleur par convection naturelle devant une plaque plane verticale, à température uniforme, en régime d'écoulement laminaire, *C.R. Hebd. Séanc Acad. Sci., Paris* **264**, série B, 1537–1540 (1967).
14. J. COUTANCEAU, Mesure directe du coefficient local d'échange de chaleur par convection naturelle sur une plaque plane verticale isotherme, en régime turbulent, *C.R. Hebd. Séanc Acad. Sci., Paris* **265**, série B, 211–214 (1967).
15. E. SCHMIDT et W. BECKMANN, Das temperatur und geschwindigkeitsfeld vor einer wärme abgeben senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion, *Tech. Mechn. Thermodynam.* **1**, 341–349 et 391–406 (1930).
16. E. GRIFFITHS et A. H. DAVIS, The transmission of heat by radiation and convection, *Dept. of Scientific and Industrial Research—Food Investigation Board, Special Report, No. 9*, H.M.S.O., London (1922).
17. R. CHEESEWRIGHT, Turbulent natural convection from a vertical plane surface, *J. Heat Transfer*, **90**, C, no 1, 1–8 (1968).
18. R. G. DESSLER, Heat transfer and fluid friction for fully developed turbulent flow of air and supercritical water with variable fluid properties, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **76**, 73–85 (1954).

Abstract—It has been shown that a useful group of parameters, obtained from a similitude analysis of natural convection, consists of the Prandtl and Nusselt numbers and the ratios gD_0^3/ν_0^2 and T_p/T_0 . This selection has been confirmed by a series of experiments.

New relationships are proposed giving the values of the local coefficient of heat transfer and of wall friction for turbulent flow as well as the velocity and temperature distributions laws in the turbulent boundary layer.

Zusammenfassung—Es wird gezeigt, dass eine aus Ähnlichkeitsbetrachtungen für freie Konvektion erhaltene, nützliche Parametergruppe aus der Prandtl-, der Nusselt-Zahl und dem Verhältnis gD_0^3/ν_0^2 und T_p/T_0 besteht. Diese Auswahl wurde durch eine Reihe von Versuchen gerechtfertigt.

Neue Beziehungen werden vorgeschlagen für die Werte des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten und der Wandreibung bei turbulenter Strömung, sowie für die Gesetze der Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung in turbulenter Grenzschicht.

Аннотация—Показано, что необходимая группа параметров, полученная при анализе естественной конвекции с помощью теории подобия, состоит из критериев Прандтля и Нуссельта и отношений gD^3/ν^2 и T_p/T_0 . Этот подбор проверен серией экспериментов.

Предложены новые соотношения, позволяющие получить значения локального коэффициента теплообмена и трения на стенке для турбулентного течения. А также распределения скорости и температуры в турбулентном пограничном слое.